BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В КОПМЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

А.М.АХМЕДОВ, Е.Ю.МУСТАФАЕВА

Бакинский Государственный Университет

В работе рассматривается операторно-дифференциальное уравнение второго порядка в комплексной плоскости, когда коэффициенты имеют особенность типа полюс в точке z=0. Доказывается теорема существования решения рассматриваемого уравнения и отдельно исследуется спектральность решения при спектральности коэффициентов. Рассматриваемая задача исследуется в таком виде впервые.

1. Разрешимость операторно-дифференциального уравнения второго порядка

Пусть $L(H)$ - банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в H, где H - гильбертово пространство. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2U}{dz^2}=\frac{1}{z}\left(\sum_{k=0}^{\infty}B_k z^k\right)\frac{dU}{dz}+\frac{1}{z^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}A_k z^k\right)U, \tag{1}$$

где z комплексная переменная, коэффициенты $A_k, B_k \in L(H)$ $(k=0,1,2,...)$ и ряды $\sum_{k=0}^{\infty}A_k z^k$ и $\sum_{k=0}^{\infty}B_k z^k$ абсолютно сходятся в кругах $|z|<\rho_1$ и $|z|<\rho_2$, соответственно. Пусть $\rho=\min(\rho_1,\rho_2)$ и в дальнейшем мы будем рассматривать задачу в круге $|z|<\rho$.

Мы будем искать решение уравнения (1) в виде:

$$U(z)=(\sum_{m=0}^{\infty}U_m z^m)z^R, \tag{2}$$

где операторы U_m и R будут определены в дальнейшем.

Вычисляя производные $\frac{dU}{dz}$ и $\frac{d^2U}{dz^2}$, подставляя их в (1) и применяя абстрактную аналогию метода Фробениуса, мы можем выписать формулы для коэффициентов U_m:

$$U_o(R^2-R)-B_0U_0R-A_0U_0=0, \tag{3}$$

$$U_m\left[R^2+2mR+m(m-1)I\right]-mB_0U_m-mB_0U_m-B_0U_mR-A_0U_m=F_m,$$

$$m = 1,2,\dots, \qquad (4)$$

где

$$F_m = \sum_{\substack{k+p=m-1 \\ p\neq m-1}} (p+1) B_k U_{p+1} + \sum_{\substack{k+p=m \\ p\neq m}} B_k U_p R + \sum_{\substack{k+p=m \\ p\neq m}} A_k U_p . \qquad (5)$$

Выберем U_0 ограниченным и таким, что существует U_0^{-1} и также ограничен. Пусть операторы A_0, B_0 и U_0 коммутативны. Если оператор $B_0^2 + 2B_0 + I + A_0$ является спектральным оператором скалярного типа, тогда из уравнения (4) для искомого оператора R мы получаем

$$R^2 - (B_0 + I)R - A_0 = 0, \qquad (6)$$

и, следовательно,

$$R = f(B_0) = \frac{B_0 + I + (B_0^2 + 2B_0 + I + A_0)^{\frac{1}{2}}}{2}, \qquad (7)$$

или $$R = g(B_0) = \frac{B_0 + I - (B_0^2 + 2B_0 + I + A_0)^{\frac{1}{2}}}{2}. \qquad (8)$$

Пусть $A_0 = B_0^k$, где k некоторое неотрицательное целое число, тогда по теореме 3.1 из ([1], с.37) мы получаем, что для разрешимости уравнения (4) должно выполняться следующее условие:

$$P(\lambda,\mu) = \mu^2 + (2m-1)\mu - \lambda\mu - \lambda^k - m\lambda + (m-1)m \neq 0 \qquad (9)$$

для $\forall(\lambda,\mu) \in \sigma(B_0)\times\sigma(R)$, где $\sigma(B_0)$ и $\sigma(R)$ - спектры операторов B_0 и R соответственно.

Тогда решение уравнения (4) определяется по формуле

$$U_m = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_{B_0}} \int_{\Gamma_R} \frac{(B_0 - \lambda I)^{-1} F_m (R - \mu I)^{-1}}{P(\lambda,\mu)} d\mu d\lambda, \qquad (10)$$

и Γ_{B_0}, Γ_R - кусочно-гладкие контуры, окружающие спектры операторов B_0 и R, соответственно.

Если R определяется по (7), тогда мы имеем

$$(R - \mu I)^{-1} = (f(B_0) - \mu I)^{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{B_0}} \frac{(B_0 - \nu I)^{-1} d\nu}{(f(\nu) - \mu)}. \qquad (11)$$

Подставляя (11) в (10), мы получим:

$$U_m = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_{B_0}} \int_{\Gamma_R} \frac{(B_0 - \lambda I)^{-1} F_m (R - \mu I)^{-1}}{P(\lambda,\mu)} d\mu d\lambda = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_0}\int_{\Gamma_0} \frac{(B_0 - \lambda I)^{-1} F_m (B_0 - \nu I)^{-1}}{P(\lambda, f(\nu))} d\nu d\lambda . \qquad (12)$$

Следовательно, решение уравнения (4) определяется по формуле (12), и условие (9) теперь выглядит так:

$$P(\lambda, f(\nu)) = f(\nu)^2 + (2m-1) f(\nu) - \lambda f(\nu) - \lambda^k - m\lambda + (m-1)m \neq 0 \qquad (13)$$

для произвольных $(\lambda,\nu) \in \sigma(B_0)\times\sigma(B_0)$.

Ясно, что $P(\lambda, f(\nu)) = O(m^2)$. Используя это, мы получим: $\|U_m\| \leq \frac{c}{m^2}\|F_m\|$.

Нетрудно доказать, что для любого ρ_1, такого что $0 < \rho_1 < \rho$, и для любого $m \geq 0$

$$\|U_m\|\rho_1^m \leq const .$$

Тогда для любого ρ_2: $\rho_1 < \rho_2 < \rho$ мы имеем:

$\sum_{n=1}^{\infty}\|U_n\|\rho_1^n = \sum_{n=1}^{\infty}\|U_n\|\rho_2^n\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n \leq const\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^n < \infty$. Отсюда $\sum_{n=1}^{\infty} U_n \rho_1^n$ сходится для $\forall \rho_1 : 0 < \rho_1 < \rho$, откуда следует существование решения (2) уравнения (1).

Для существования решения (2) уравнения (1) по теореме 3.1 ([1], с.37) в случае (8) должно удовлетворяться следующее условие:

$$P(\lambda, g(\nu)) = g(\nu)^2 + (2m-1)g(\nu) - \lambda g(\nu) - \lambda^k - m\lambda + (m-1)m \neq 0 . \qquad (14)$$

Отметим, что согласно условию $A_0 = B_0^k$, для коммутативности операторов A_0, B_0 и U_0 достаточно потребовать коммутативность операторов B_0 и U_0. Итак, мы приходим к теореме существования.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

а) оператор $B_0^2 + 2B_0 + I + A_0$ является оператором скалярного типа;

б) $A_0 = B_0^k$, где k - неотрицательное целое число;

с) операторы B_0 и U_0 коммутативны и оператор U_0^{-1} существует и ограничен;

д) для $f(\nu)$, определенной в (7), выполняется условие (13) (или для $g(\nu)$, определенной в (8), выполняется условие (14)). Тогда существует решение уравнения (1) в виде $U(z) = (\sum_{n=0}^{\infty} U_n z^n) z^R$, где оператор R определяется формулой (7) ((8)); при этом ряд $\sum_{n=0}^{\infty} U_n z^n$ абсолютно сходится в круге $|z| < \rho$, $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$.

2. Случай спектральных коэффициентов

Предположим, что A_i, B_j, $i, j = 0,1,2,\ldots$, - взаимно коммутирующие спектральные операторы.

Для резольвенты спектрального оператора B_0 известно следующее соотношение ([2], XV.5.2):

$$(B_0 - \lambda I)^{-1} = \sum_{n_1=0}^{\infty} N^{n_1} \int_{\sigma(B_0)} \frac{E(d\theta)}{(\lambda - \theta)^{n_1+1}} , \qquad (15)$$

где N квазинильпотентная часть, E разложение единицы оператора B_0.

Подставим (15) в (12):

$$U_m = \sum_{n_1+n_2=0}^{\infty} N^{n_1+n_2} \int_{\Gamma_{B_0}} \int_{\Gamma_{B_0}} \frac{1}{P(\lambda, f(\nu))} \int_{\sigma(B_0)} \frac{E(d\theta)}{(\lambda-\theta)^{n_1+1}} \int_{\sigma(B_0)} \frac{E(d\eta)}{(\nu-\eta)^{n_2+1}} d\lambda d\nu F_m . \qquad (16)$$

Обозначая $P_1(\lambda,\nu) = P(\lambda, f(\nu))$, по теореме Фубини мы получим

$$U_m = \left(\sum_{n_1+n_2=0}^{\infty} \frac{N^{n_1+n_2}}{n_1!n_2!} \int_{\sigma(B_0)} \int_{\sigma(B_0)} \frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial\theta^{n_1}\partial\eta^{n_2}} \left(\frac{1}{P_1(\theta,\eta)} \right) E(d\theta)E(d\eta) \right) F_m . \qquad (17)$$

Обозначим первый множитель произведения в (17) при помощи V и рассмотрим отдельно его первое слагаемое:

$$V = \int_{\sigma(B_0)} \int_{\sigma(B_0)} \frac{E(d\theta)E(d\eta)}{P_1(\theta,\eta)} + \sum_{n_1+n_2=1}^{\infty} \frac{N^{n_1+n_2}}{n_1!n_2!} \int_{\sigma(B_0)} \int_{\sigma(B_0)} \frac{\partial^{n_1+n_2}}{\partial\theta^{n_1}\partial\eta^{n_2}} \left(\frac{1}{P_1(\theta,\eta)} \right) E(d\theta)E(d\eta) . \qquad (18)$$

Подобно работе [3], мы можем доказать, что $\int_{\sigma(B_0)} \int_{\sigma(B_0)} \frac{E(d\theta)E(d\eta)}{P_1(\theta,\eta)}$ является оператором скалярного типа, а остальная сумма представляет квазинильпотентный оператор, т.е. оператор V спектральным оператором.

Из общей формулы (4) для F_m по индукции можно легко доказать, что если U_0 спектральный и коммутирует с A_i, B_j, $i,j = 0,1,..$, то все операторы F_m и, следовательно, U_m спектральны. Итак, доказана следующая

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Если операторы A_i, B_j, $i,j = 0,1,..$, и U_0 спектральны и взаимно коммутативны, тогда операторные коэффициенты U_m, $m = 1,2,..$, в (2) также являются спектральными операторами.

3. О спектральном решении

Рассмотрим условия, при которых операторно-дифференциальное уравнение (1) в гильбертовом пространстве имеет решение, являющееся спектральным оператором.

Пусть Ω полная алгебра, в смысле Н.Данфорда ([2], XVII.1), порожденная семейством коммутирующих спектральных операторов $\tau = \{U_0, A_j, B_j, j = 0,1,...\}$ и их разложениями единицы, и замкнутая в равномерной операторной топологии. Ясно, что операторы $U_m \in \Omega$ и конечные суммы $\sum_{m=0}^{n} U_m z^m \in \Omega$. Так как в параграфе 1 была доказана сходимость ряда $\sum_{m=0}^{\infty} U_m z^m$ в равномерной операторной топологии, то, учитывая замкнутость алгебры Ω в замкнутой операторной топологии, сумма ряда $\sum_{m=0}^{\infty} U_m z^m$ также принадлежит Ω. Предположим, что булева алгебра, порожденная разложениями единиц операторов семейства

$\tau=\{U_0, A_i, B_j,\ i,j=0,1,...\}$, ограничена. Тогда по теореме XVII.2.14 из [2] любой оператор из Ω является спектральным и, следовательно, такой же является и сумма ряда $\sum_{m=0}^{\infty} U_m z^m$.

Так как R - спектральный оператор, то по известной теореме об аналитической функции от спектрального оператора ([2], XV.5.6) оператор $e^{R\ln z}$ также является спектральным.

Как функция от B_0 оператор z^R коммутирует со всеми U_m, $m=0,1,..$, и, следовательно, с $\sum_{m=0}^{\infty} U_m z^m$. Произведение двух спектральных операторов в гильбертовом пространстве есть спектральный оператор, поэтому $U(z)=(\sum_{m=0}^{\infty} U_m z^m) z^R$ также спектральный оператор.

Итак, нами доказана следующая

Теорема 3. Если булева алгебра, порожденная разложениями единиц спектральных коммутирующих операторов семейства $\tau=\{U_0, A_i, B_j,\ j=0,1,...\}$, ограничена и выполняются условия теоремы 1, то уравнение (1) имеет решение, являющееся спектральным оператором.

Следует отметить, что вопрос разрешимости операторно-дифференциального уравнения первого порядка был рассмотрен в известной работе Л.Хилле [7]; вопрос же разрешимости уравнения (1) был исследован в работах [4-6] и условия, наложенные на коэффициенты уравнения настоящей работы, являются более общими, чем в этих работах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Далецкий Т.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: 1970.
2. Данфорд Н., Шварц Т. Линейные операторы. Т.3, Спектральные операторы, 1971.
3. Ахмедов А.М., Гаджиев А.А. О разрешимости операторно-дифференциальных уравнений второго порядка. Вестник Бакин.Гос.Универ., сер. физ.-мат., 2, 1997 .
4. Ахмедов А.М., Гаджиев А.А. О разрешимости некоторых классов операторных уравнений. Матер.Азерб.Мат.общества, 2, Баку, 1996, с.3-13.
5. Ахмедов А.М. О разрешимости операторно-дифференциальных уравнений в комплексной области. Труды инст. матем.-мех., VII (XVI), Баку, 1998, с.29-33.
6. Гаджиев А.А. Разрешимость некоторых операторно-дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Канд.диссерт., Баку, 1997, 111 с.
7. Hille E., Linear differential equations in Banach algebras, Rus. Internat. Sumpos. Linear Spaces, Yerusalem, 1960, Academic Press, Oxford-London-New York-Paris, Pergamon Press, 1967, 263-273.

KOMPLEKS MÜSTƏVİDƏ BƏZİ OPERATOR-DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN HƏLLOLUNMASI HAQQINDA

Ə.M.ƏHMƏDOV, Y.Y.MUSTAFAYEVA

XÜLASƏ

Bu işdə əmsalları z=0 nöqtəsində polyusa malik olan ikinci tərtib operator-diferensial tənliyə baxılır. Baxılan tənliyin həllinin varlığı haqqında teorem isbat olunmuş və bu həllin spektrallığı araşdırılmışdır. Baxılan məsələ bu şəkildə ilk dəfə tədqiq olunur.

ON SOLVABILITY OF SOME OPERATOR-DIFFERENTIAL EQUATIONS IN COMPLEX DOMAIN

A.M.AKHMEDOV, Y.Y.MUSTAFAYEVA

SUMMARY

In the paper an operator-differential equation of second order in complex domain when coefficients have pole type singularity at point z=0 is considered. The theorem of existence of the solution of the considered equation is proved and separately the solution being a spectral operator at the condition of the coefficients being spectral operators is investigated. It is the first time that the considered problem is investigated in this form.